MAI 1 – 2. cvičení

I. Ještě opakování - příklady z 1.cvičení:
1. výroky, množiny : II./ př.1, 4, 6;
2. ještě k absolutní hodnotě: I./ př. 3 g, h) ; II/př.5 ;
3. funkce: něco z příkladů v III – definiční obory, grafy (bez užití diferenciálního počtu), vlastnosti funkce, funkce inverzní;
4. důkazy užitím matematické indukce: IV/ př.4, 6;
5. vlastnosti zobrazení: V/ př.a), b) .

II. Spočetné množiny:
Zopakujte si , co znamená, že množina M je spočetná.
Dokažte:
1. Nechť množiny A, B jsou spočetné, pak také množina $A \times B$ je spočetná.
   Nechť množiny $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ jsou spočetné, pak také množina $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ je spočetná.
2. Množina všech uspořádaných n-tic racionálních čísel ($n \in N, n \geq 2$) je spočetná.
3. Sjednocení konečně mnoha nebo spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina.
4. Množina všech konečných posloupností prvků dané spočetné množiny je spočetná.
5. Množina všech polynomů s racionálními koeficienty je spočetná.

III. Supremum a infimum množiny v R:

1. Zopakujte si definici suprema , infima, maxima a minima množiny v R, také větu o supremu (infimu).

2. Uveďte příklad množiny, která má supremum a nemá maximum; může mít množina maximum, ale ne supremum? Uveďte příklad množiny, která supremum nemá.

3. Najděte (v R) supremum, infimum, maximum, minimum (pokud existují) následujících množin:

a) $A_1 = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$; $A_2 = \left\{1 - \frac{1}{n^2}; n \in N\right\}$; $A_3 = \left\{\frac{n-1}{n}; n \in N\right\}$; $A_4 = \left\{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in N\right\}$;

$A_5 = \left\{n^{(-1)^n}; n \in N\right\}$; $A_6 = \left\{\frac{p}{p+q}; p, q \in N\right\}$;

b) $B_1 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N\right\}$; $B_2 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N, n > m\right\}$; $B_3 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N, n \leq m\right\}$;

c) $C_1 = \left\{2^{-n} + 3^{-n}; n \in N\right\}$; $C_2 = \left\{2^{-n} + 3^{-n}; n \in Z\right\}$;

d) $D_1 = \left\{\sin x; x \in [0, 2\pi]\right\}$; $D_1 = \left\{\sin x; x \in (0, 2\pi)\right\}$; $D_1 = \left\{\sin x; x \in (0, \pi)\right\}$; $D_1 = \left\{\sin x . \cos x; x \in R\right\}$;

e) $E = \left\{q < \sqrt{3}; q \in Q\right\}$.

4. Ukažte, že pro neprázdné množiny A, B reálných čísel platí: $(\forall a \in A\ \forall b \in B : a \leq b) \Rightarrow (\sup A \leq \inf B)$.

5. Nechť podmnožiny A, B množiny reálných čísel jsou neprázdné a omezené. Co lze říci o supremu a infimu množin
   a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A + B = \left\{a + b;\ a \in A \wedge b \in B\right\}$; d) $-A = \left\{-a;\ a \in A\right\}$.

IV. Nekonečné posloupnosti (zopakujte si definici posloupnosti reálných čísel):

1. Co znamená, že posloupnost je omezená shora, resp.omezená zdola, resp.omezená?
   Zopakujte také definice: posloupnost je rostoucí, resp. neklesající, resp. klesající, resp. nerostoucí.
   Vyšetřete, zda některou z těchto vlastností mají posloupnosti:

   a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; b) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ c) $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$; d) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$ e) $n\cdot(\sqrt{n^2+1}-n)$;

   e) $\left\{q^n\right\}$ pro (i) $q\in(-1,1)$, (ii) pro $q\in(1,\infty)$, (iii) pro $q\leq -1$.

2*. a) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ je rostoucí a shora omezená.

   b) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1=10$, $a_{n+1}=6-\frac{5}{a_n}$ je klesající a zdola omezená .

A třeba i

V. Těleso reálných čísel (a cvičení důkazů):

1. Dokažte následující tvrzení:
   a) Je-li $x\in R, x\neq 0$, pak opačný prvek $-x$ a inverzní prvek x^{-1} jsou určené jednoznačně ;
   b) $\forall x\in R: 0\cdot x=0$;
   c) $\forall x,y\in R:\ (-x).(-y)=x.y$;
   d) $\forall x\in R: -(-x)=x$, $-x=(-1).x$;
   e) $\forall x,y\in R:\ (-x).y=-(x.y)=x.(-y)$.

2. Dokažte:
   a) $0<1$; b) $0<x\Rightarrow 0<x^{-1}$; c) $x\neq 0\Rightarrow 0<x.x$; d) $0<x\Rightarrow -x<0$;
   e) $x<y\Rightarrow -x>-y$; f) $x<0<y\Rightarrow x.y<0$.